

Вариант В (решения задач)

Управляемый процесс описывается следующей задачей Коши для скалярного обыкновенного дифференциального уравнения:

$$x'(t) = x(t) + u(t), \quad 0 < t < T; \quad x(0) = 0.$$

Управления $u = u(t)$ выбираются из гильбертова пространства $L^2(0, T)$ с целью минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T \left(x(t; u) - e^t \sqrt{t} \right)^2 dt \rightarrow \inf, \quad u(x) \in U = L^2(0, T), \quad (1)$$

где $x(t; u)$ — траектория, соответствующая управлению u .

1. Найдите в задаче (1) нижнюю грань функционала J_* и множество U_* её оптимальных решений.

Ответ: $J_* = 0$, $U_* = \emptyset$.

Решение. Решение $x(t) = x(t; u)$ задачи Коши находится явно:

$$x(t; u) = e^t \int_0^t u(s) e^{-s} ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

При сравнении $x(t; u)$ с целевой траекторией $e^t \sqrt{t}$ возникает желание проверить, возможно ли их совпадение:

$$e^t \int_0^t u(s) e^{-s} ds = e^t \sqrt{t}, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Это совпадение возможно в единственном случае, когда

$$u(t) = \frac{e^t}{2\sqrt{t}}, \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

однако, такое управление *не принадлежит* пространству $L^2(0, T)$, поскольку функция $u^2(t)$ имеет неинтегрируемую особенность в точке $t = 0$. В то же время, можно аппроксимировать управление $u(t)$ из (4) управлениями

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, \varepsilon), \\ u(t), & t \in (\varepsilon, T), \end{cases} \quad u_\varepsilon(t) \in L^2(0, T), \quad \varepsilon > 0, \quad (5)$$

которые при $\varepsilon \rightarrow 0$ будут сходиться к $u(t) \in L^1(0, T)$ в банаховом пространстве $L^1(0, T)$. Отсюда будет следовать *равномерная* на $[0, T]$ сходимость траекторий:

$$\|x(\cdot; u_\varepsilon) - x(\cdot; u)\|_{C[0, T]} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

значит, $J(u_\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. нижняя грань $J_* = 0$ и не достигается, поскольку единственное оптимальное управление $u(t) \notin L^2(0, T)$.

2. Рассмотрите аналогичную задачу, в которой вместо $J(u)$ взят другой критерий качества, отражающий желание оптимизировать траекторию лишь на этапе $t \in [T/2, T]$:

$$\mathcal{J}(u) = \int_{T/2}^T \left(x(t; u) - e^t \sqrt{t} \right)^2 dt \rightarrow \inf, \quad u(x) \in U = L^2(0, T). \quad (6)$$

Найдите в задаче (2) нижнюю грань $\mathcal{J}_*$ функционала, а также то из оптимальных управлений $u_* = u_*(t) \in L^2(0, T)$, которое имеет **наименьшую** L^2 -норму.

Ответ: $\mathcal{J}_* = 0$, $u_*(t) = \frac{\sqrt{2T}}{1-e^{-T}} e^{-t}$, $t \in (0, T/2)$, $u_*(t) = \frac{e^t}{2\sqrt{t}}$, $t \in (T/2, T)$.

Решение. Для доказательства того, что нижняя грань $\mathcal{J}_* = 0$, можно использовать те же рассуждения, что в задании № 1. Если для некоторого управления $u = u(t) \in L^2(0, T)$ значение $\mathcal{J}(u) = \mathcal{J}_* = 0$, то соотношение (3) будет обязательно выполняться на промежутке $t \in [T/2, T]$ и тогда при этих t значения оптимального управления будут такими же, как и в (4):

$$u(t) = \frac{e^t}{2\sqrt{t}}, \quad t \in (T/2, T). \quad (7)$$

Из (3) при $t = T/2$ получаем условие, которому должны удовлетворять значения *всех оптимальных* управлений при $t \in (0, T/2)$:

$$\int_0^{T/2} u(s) e^{-s} ds = \sqrt{T/2}. \quad (8)$$

Поскольку ищется *нормальное оптимальное управление* $u_*(t)$, имеющее наименьшую $\|\cdot\|_{L^2(0, T)}$ -норму, то требуется найти функцию $u_*(t) \in L^2(0, T/2)$ с наименьшей $\|\cdot\|_{L^2(0, T/2)}$ -нормой, удовлетворяющую условию (8), которое описывает в пространстве $L^2(0, T/2)$ гиперплоскость Γ . Другими словами, на промежутке $t \in (0, T/2)$ искомое нормальное управление является проекцией: $u_*(t) = \text{pr}_\Gamma 0$. Задача проектирования на гиперплоскость подробно разбиралась на лекциях, поэтому ограничимся воспроизведением результата:

$$u_*(t) = \frac{\sqrt{2T}}{1 - e^{-T}} e^{-t}, \quad t \in (0, T/2). \quad (9)$$

Нормальное оптимальное управление $u_*(t)$ на всём промежутке $t \in (0, T)$ будет состоять из двух последовательных режимов: в начале применяется правило (9), а на заключительном этапе – правило (7).